

Lösningar till tentamen i tillämpad kärnkemi den 10 mars 1999 kl 0815-1215

1. Ett kraftföretag betalar 350 kr/kg uran för ett parti UF_6 tillverkad från natururan. Uranhexafluoriden anrikas sedan till en ^{235}U -halt på 3.8%. För anrikningsarbetet betalar man 700 kr/kgSWU. Av det anrikade uranet gör man färdigt kärnbränsle och betalar 800 kr/kgU för tillverkningen. Hur stor blir kostnaden för färdigt bränsle (kr/kgU) om anrikningen sker med den halt av ^{235}U i det avrikade uranet som ger lägsta totalkostnad för det färdiga bränslet? (10p).

$$\text{kr} := 1 \quad \text{Pris}_{\text{UF6}} := 350 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{Pris}_{\text{tillv}} := 800 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{Pris}_{\text{anrikn}} := 700 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$V(x) := (2 \cdot x - 1) \cdot \ln[x \cdot (1 - x)^{-1}] \quad x_F := 0.72\% \quad x_P := 3.8\% \quad P := 1 \cdot \text{kg} \quad \text{Räkna på 1 kg bränsle}$$

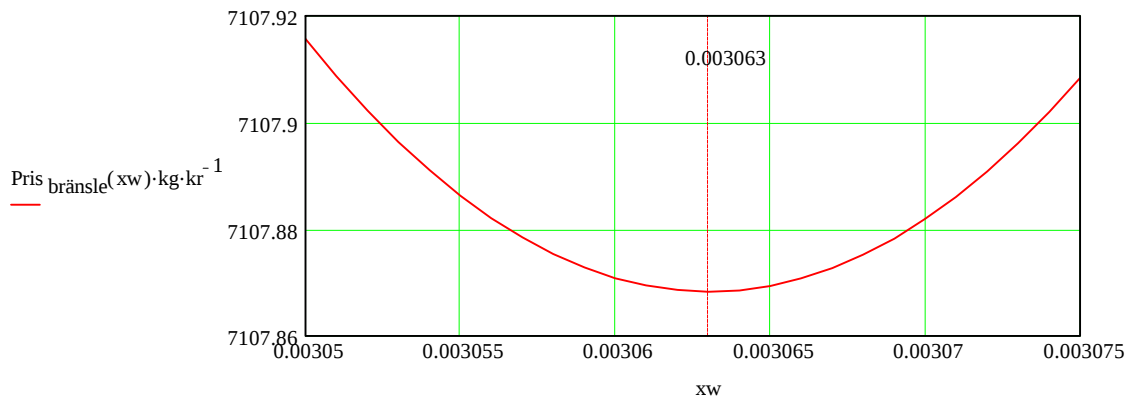
$$W(x_W) := P \cdot (x_P - x_F) \cdot (x_F - x_W)^{-1} \quad \text{Avfallsmängden}$$

$$A(x_W) := (W(x_W) \cdot V(x_W) + P \cdot V(x_P)) - (P + W(x_W)) \cdot V(x_F) \quad \text{Anrikningsarbetet}$$

$$\text{Pris}_{\text{bränsle}}(x_W) := \frac{(P + W(x_W)) \cdot \text{Pris}_{\text{UF6}} + \text{Pris}_{\text{anrikn}} \cdot A(x_W) + \text{Pris}_{\text{tillv}} \cdot P}{P} \quad \text{Total kostnad per kg}$$

Sök minimum.

$$x_W := 0.00305, 0.003051 \dots 0.003075$$



Ur diagrammet avläses: $x_{W\min} := 0.003063 \quad \text{Priset} := 7107.9 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1}$

Kontrollräkning: $\text{Pris}_{\text{bränsle}}(0.3063\%) = 7107.9 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1}$

2. ASEA-ATOM gav i sin specifikation för BWR-75 följande data: 63 bränslepinnar och en spridarhållarstav i geometrin 8x8 per knippe. Bränslepinnarnas yttre diameter = 12.25 mm, väggdjocklek på kapslingsrören av zircaloy-4 = 0.80 mm, kutsdiameter = 10.44 mm, maximal bränsletemperatur = 1800 C, kutsdensitet = 10500 kg UO₂/m³, ångtemperatur vid mättnadstryck = 286 C. Filmkoefficienten mellan kapsling och kylmedel anges vara 5 W/cm²K, samt mellan kuts och höljesrör 1.5 W/cm²K, och värmeledningsförmågan hos UO₂ 2.2 W m⁻¹ K⁻¹. En typ av modernt Svea bränsle har 96 bränslepinnar och fyra spridarhållarstavar per knippe, vilket har samma yttermått som 8x8 knippet. Dessa bränslepinnar har en ytterdiameter på 9.62 mm och en kapsling med väggdjockleken 0.63 mm. Antag att gapet mellan kuts och kapsling är lika stort som för 8x8 bränslet. Med hur många procent skulle man kunna öka reaktoreffekten vid samma maximala bränsletemperatur om man använder Svea-96 bränsle? (10p).

Börja med att beräkna specifika effekten, p_{8x8} , i w/m³ bränsle för 8x8 fallet:

$$d_c := 12.25 \cdot \text{mm} \quad r_c := \frac{d_c}{2} \quad d_f := 10.44 \cdot \text{mm} \quad r_f := \frac{d_f}{2} \quad r_i := r_c - 0.80 \cdot \text{mm} \quad r_{\text{gap}} := r_i - r_f$$

$$h := 5 \cdot \text{watt} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad \alpha_g := 1.5 \cdot \text{watt} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad k_f := 2.2 \cdot \text{watt} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$k_c := 16 \cdot \text{watt} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{Data för zircaloy-4 ur tabell 21.1} \quad T_w := (286 + 273.15) \cdot \text{K}$$

$$\Delta T_0(p_{8x8}) := p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (2 \cdot r_c \cdot h)^{-1} \quad \text{Börja med att definiera temperaturdifferenserna som funktion av specifika effekten, } p_{8x8}.$$

$$\Delta T_{\text{can}}(p_{8x8}) := p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (r_c - r_i) \cdot (2 \cdot r_i \cdot k_c)^{-1}$$

$$\Delta T_{\text{gap}}(p_{8x8}) := p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (2 \cdot \alpha_g)^{-1}$$

$$\Delta T_{\text{fuel}}(p_{8x8}) := p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (4 \cdot k_f)^{-1}$$

$$T_{\text{centrum}} = T_w + \Delta T_0(p_{8x8}) + \Delta T_{\text{can}}(p_{8x8}) + \Delta T_{\text{gap}}(p_{8x8}) + \Delta T_{\text{fuel}}(p_{8x8})$$

Men enligt talets uppgifter är $T_{\text{centrum}} = 1800 \text{ C} = 1800 + 273.15 \text{ K}$. Nu kan vi lösa ut p_{8x8} ur detta samband genom att införa våra funktioner.

$$T_{\text{centrum}} := (1800 + 273.15) \cdot \text{K}$$

$$T_{\text{centrum}} = T_w + p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (2 \cdot r_c \cdot h)^{-1} + p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (r_c - r_i) \cdot (2 \cdot r_i \cdot k_c)^{-1} + p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (2 \cdot \alpha_g)^{-1} + p_{8x8} \cdot r_f^2 \cdot (4 \cdot k_f)^{-1}$$

$$p_{8x8} := \frac{-(T_{\text{centrum}} - T_w)}{\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{r_f^2}{(r_c \cdot h)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_f^2}{(r_i \cdot k_c)} \cdot r_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_f^2}{k_c} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_f}{\alpha_g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{r_f^2}{k_f} \right]}$$

$$p_{8x8} = 4.398 \cdot 10^8 \cdot \text{watt} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$A_{8x8} := \pi \cdot r_f^2$$

Nu inför vi de nya måtten för Svea-96 bränslet och beräknar p_{S96} med samma ekvation som användes för p_{8x8} .

$$r_{\text{gap}} = 0.105 \cdot \text{mm} \quad d_c := 9.62 \cdot \text{mm} \quad r_c := \frac{d_c}{2} \quad r_i := r_c - 0.63 \cdot \text{mm} \quad r_f := r_i - r_{\text{gap}} \quad r_f = 4.075 \cdot \text{mm}$$

$$p_{S96} := \frac{-(T_{\text{centrum}} - T_w)}{\left[\frac{-1}{2} \cdot \frac{r_f^2}{(r_c \cdot h)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_f^2}{(r_i \cdot k_c)} \cdot r_c + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_f^2}{k_c} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r_f}{\alpha_g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{r_f^2}{k_f} \right]}$$

$$p_{S96} = 7.089 \cdot 10^8 \cdot \text{watt} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$A_{S96} := \pi \cdot r_f^2$$

Vi antar nu att den bränslefyllda pinnlängden är samma i båda fallen. Detta medför att effekten i en patron är en konstant gånger bränslekutsarnas totala yta i ett snitt tvärs igenom patronen.

$$P_{\text{tot}8x8} = \text{konst} \cdot 63 \cdot A_{8x8} \cdot p_{8x8} \quad P_{\text{tot}S96} = \text{konst} \cdot 96 \cdot A_{S96} \cdot p_{S96}$$

$$\text{Effektändringen} = \frac{P_{\text{tot}S96} - P_{\text{tot}8x8}}{P_{\text{tot}8x8}} \cdot 100$$

$$\text{Effektändringen} = \frac{\text{konst} \cdot 96 \cdot A_{S96} \cdot p_{S96} - \text{konst} \cdot 63 \cdot A_{8x8} \cdot p_{8x8}}{\text{konst} \cdot 63 \cdot A_{8x8} \cdot p_{8x8}} \quad \text{Här kan vi eliminera "konst" och får då:}$$

$$\text{Effektändringen} := \frac{1}{21} \cdot \frac{(32 \cdot A_{S96} \cdot p_{S96} - 21 \cdot A_{8x8} \cdot p_{8x8})}{(A_{8x8} \cdot p_{8x8})} \quad \text{Effektändringen} = 49.708 \cdot \%$$

3. För att åldersbestämma berget i en borrhärna från havsbotten tog man ut en liten kalcitkristall ur borrhärnan. Ur denna kristall skars sedan två mycket tunna skivor. Skiva nr 1 etsades så att spår från spontant fissionerat ^{238}U kunde räknas i mikroskop (ett spår bildas per fission). Man fann i medeltal 31 st/mm³. Skiva nr 2 bestrålades under 10 minuter i ett rent termiskt neutronflöde på $1.2 \times 10^{12} \text{ n/cm}^2\text{s}$. Efter etsning av denna skiva fann man i medeltal 166 fissionsspår per mm³. Detta beror på att kalcit kristallen innehåller uran. Beräkna kristallens ålder om ^{238}U undergår spontan fission i $5.45 \times 10^{-5}\%$ av alla sönderfall. (10p).

OBS: ^{238}U har spontan fission, men inte ^{235}U . ^{235}U fissionerar med termiska neutroner, men termisk fission av ^{238}U är försumbar.

$$\phi := 1.2 \cdot 10^{12} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sec}^{-1} \quad \sigma_f := 582.2 \cdot 10^{-28} \cdot \text{m}^2 \quad N_{\text{fiss}} := (166 - 31) \cdot \text{mm}^{-3} \quad t_{\text{irr}} := 10 \cdot 60 \cdot \text{sec}$$

$$N_{\text{fiss}} = \phi \cdot \sigma_f \cdot N_{235} \cdot t_{\text{irr}} \quad N_{235} := \frac{N_{\text{fiss}}}{\left[\phi \cdot (\sigma_f \cdot t_{\text{irr}}) \right]} \quad N_{235} = 3.221 \cdot 10^{17} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$x_F := 0.72\% \quad N_{238} := \frac{N_{235}}{x_F} \quad N_{238} = 4.473 \cdot 10^{19} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$t_{\text{halv}238} := 4.468 \cdot 10^9 \cdot \text{yr} \quad \text{Fig. 5.1 i läroboken} \quad \lambda_{238} := \frac{\ln(2)}{t_{\text{halv}238}} \quad \Delta N_{238} := 33 \cdot \text{mm}^{-3}$$

Antal fissionsspår, ΔN_{238} , från radioaktivt sönderfall av ^{238}U under tiden t ges nu av sambandet:

$$\text{Fissandel} := 5.45 \cdot 10^{-5} \cdot \%$$

$$\Delta N_{238} = \text{Fissandel} \cdot (N_{238} \cdot \exp(\lambda_{238} \cdot t) - N_{238})$$

$$t := \frac{\ln \left[\frac{(\Delta N_{238} + \text{Fissandel} \cdot N_{238})}{(\text{Fissandel} \cdot N_{238})} \right]}{\lambda_{238}} \quad t = 2.752 \cdot 10^{14} \cdot \text{sec} \quad t = 8.72 \cdot 10^6 \cdot \text{yr}$$

4. Efter uttag ur en kraftreaktor utvecklar bränslet fortfarande värme genom radioaktivt sönderfall av de olika isotoper som bildats under reaktordriften. Vid tider över någon vecka och upp till ca 200 år kommer värmeutvecklingen i det uttagna bränslet att domineras av den energi som frigörs vid sönderfall av ^{90}Sr - ^{90}Y - ^{90}Zr och ^{137}Cs - $^{137\text{m}}\text{Ba}$ - ^{137}Ba . ^{90}Sr och ^{137}Cs bildas under reaktor-driften genom fission av U och Pu med totala fissionsutbytena 4.8% respektive 6.2% (försumma n, γ reaktioner). Medelenergierna i MeV/sönderfall för dessa nuklider är 0.196 (^{90}Sr), 0.936 (^{90}Y), 0.816 (^{137}Cs) och 0.664 ($^{137\text{m}}\text{Ba}$). Energin vid klyvning av en U eller Pu atom antages vara 200 MeV och reaktorn körs kontinuerligt på konstant effekt under 5 år, samt totala energiuttaget är 47 MWd/kg initialt uran. Hur stor är energiutvecklingen (W/kg initialt uran) i detta bränsle 30 år efter uttag ur reaktorn? (10p).

$$Q_{\text{tot}} := 47 \cdot \text{day} \cdot 10^6 \cdot \text{watt} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{MeV} := 1.60217733 \cdot 10^{-13} \cdot \text{joule} \quad Q_{\text{fiss}} := 200 \cdot \text{MeV}$$

$$N_{\text{fiss}} := \frac{Q_{\text{tot}}}{Q_{\text{fiss}}} \quad N_{\text{fiss}} = 1.267 \cdot 10^{23} \cdot \text{kg}^{-1} \quad y_{90} := 4.8\% \quad y_{137} := 6.2\% \quad \text{tiden} := 30 \cdot \text{yr}$$

$$N_{\text{noll90}} := y_{90} \cdot N_{\text{fiss}} \quad N_{\text{noll137}} := y_{137} \cdot N_{\text{fiss}} \quad \text{Vi kan försumma sönderfallet under de 5 åren för att förenkla problemet, eftersom de långlivade mödrarna har halveringstider på ca 30 år.}$$

$$\lambda_{\text{Sr90}} := \frac{\ln(2)}{28.5 \cdot \text{yr}} \quad \lambda_{\text{Cs137}} := \frac{\ln(2)}{30.0 \cdot \text{yr}}$$

$$Q_{90} := (0.196 + 0.936) \cdot \text{MeV}$$

Vi kan antaga att de relativt kortlivade döttrarna har samma sönderfallshastighet som mödrarna, dvs ett dottersönderfall per modersönderfall.

$$Q_{137} := (0.816 + 0.664) \cdot \text{MeV}$$

$$P_{30\text{år}} := Q_{90} \cdot \lambda_{\text{Sr90}} \cdot N_{\text{noll90}} \cdot \exp(-\lambda_{\text{Sr90}} \cdot \text{tiden}) + Q_{137} \cdot \lambda_{\text{Cs137}} \cdot N_{\text{noll137}} \cdot \exp(-\lambda_{\text{Cs137}} \cdot \text{tiden})$$

$$P_{30\text{år}} = 1.0920 \cdot \text{watt} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Om vi vill göra en mer exakt lösning börjar vi med fissionsraten och räknar ut denna och utbytena ut hur mycket av respektive långlivade nuklid som finns vid reaktorstoppet. Vi antar då att reaktorn har drivits med konstant effekt i bränslet.

$$t_{\text{irr}} := 5 \cdot \text{yr} \quad \text{Fissrat} := \frac{N_{\text{fiss}}}{t_{\text{irr}}} \quad \text{Fissrat} = 8.032 \cdot 10^{14} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$\text{Bildningsrat}_{90} := \text{Fissrat} \cdot y_{90} \quad \text{Bildningsrat}_{90} = 3.855 \cdot 10^{13} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$\text{Bildningsrat}_{137} := \text{Fissrat} \cdot y_{137} \quad \text{Bildningsrat}_{137} = 4.98 \cdot 10^{13} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$N_{\text{noll90}} := \frac{\text{Bildningsrat}_{90}}{\lambda_{\text{Sr90}}} \cdot (1 - \exp(-\lambda_{\text{Sr90}} \cdot t_{\text{irr}})) \quad N_{\text{noll90}} = 5.728 \cdot 10^{21} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$N_{\text{noll137}} := \frac{\text{Bildningsrat}_{137}}{\lambda_{\text{Cs137}}} \cdot (1 - \exp(-\lambda_{\text{Cs137}} \cdot t_{\text{irr}})) \quad N_{\text{noll137}} = 7.42 \cdot 10^{21} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$P_{30\text{år}} := Q_{90} \cdot \lambda_{\text{Sr90}} \cdot N_{\text{noll90}} \cdot \exp(-\lambda_{\text{Sr90}} \cdot \text{tiden}) + Q_{137} \cdot \lambda_{\text{Cs137}} \cdot N_{\text{noll137}} \cdot \exp(-\lambda_{\text{Cs137}} \cdot \text{tiden})$$

$$P_{30\text{år}} = 1.0301 \cdot \text{watt} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{Effekten är marginellt lägre än med det förenklade antagandet (ca 6\%)}$$

5. En liten homogen reaktor skall konstrueras som består av rent $^{233}\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$ löst i tungt vatten. Reaktorkärlet skall vara sfäriskt med en diameter på 1 m. Makroskopiska absorptionstvärnsnittet för nitratjonerna uppskattas till 0.111 m^{-1} . Försumma inverka av tankväggs material, syret i uranyljonerna och molvolymen hos uranylinitrat, samt använd kärndata för PWR. Produkten ϵ^*p kan anses vara 1. Vilken minsta halt av uranylinitrat (M) behövs då för att uppnå kriticitet? (10p).

$$N_A := 6.0221367 \cdot 10^{23} \cdot \text{mole}^{-1} \quad M := \text{mole} \cdot \text{liter}^{-1} \quad \eta := 2.27 \quad \tau := 0.0115 \cdot \text{m}^2 \quad L_{m2} := 2.89 \cdot \text{m}^2$$

Först räknar vi ut nödvändigt värde på fissionsfaktorn, f, ur geometri, etc.

$$r := \frac{1 \cdot \text{m}}{2} \quad B2 := \pi^2 \cdot r^{-2} \quad B2 = 39.478 \cdot \text{m}^{-2} \quad L2 = L_{m2} \cdot (1 - f) \quad M2 = L2 + \tau \quad k_{\text{eff}} = \frac{k_{\text{inf}}}{1 + B2 \cdot M2} = 1$$

$$k_{\text{inf}} = 1 + B2 \cdot M2 \quad \text{men fyrfaktorformeln ger:} \quad k_{\text{inf}} = \eta \cdot f \cdot 1 \quad \text{ty } \epsilon^*p = 1 \text{ enligt texten}$$

$$\eta \cdot f \cdot 1 = 1 + B2 \cdot M2 \quad \text{Inför värden från tidigare ekvationer så erhålles:}$$

$$\eta \cdot f \cdot 1 = 1 + B2 \cdot (L2 + \tau) \quad \eta \cdot f = 1 + B2 \cdot [L_{m2} \cdot (1 - f) + \tau] \quad \text{Lös ut f ur detta samband så erhålles:}$$

$$f := \frac{(1 + B2 \cdot L_{m2} + B2 \cdot \tau)}{(\eta + B2 \cdot L_{m2})} \quad \text{sätt in siffervärden så erhålles:} \quad f = 0.99299$$

Antag X mol $^{233}\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$ per liter i reaktorn. OBS: 1 M uranylinitrat ger 1M uranyl- och 2M nitratjoner. Vi söker alltså det värde på X som ger $f=0.99299$ som svar.

Betrakta 1 m^3 lösning och beräkna makroskopiska absorptionstvärnsnitten:

$$\text{För } \text{D}_2\text{O} \text{ gäller:} \quad \Sigma_{\text{D}_2\text{O}} := 0.0080 \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{Eftersom vi inte behöver korrigera för att halten } \text{D}_2\text{O} \text{ sjunker}$$

$$\text{För } \text{NO}_3^- \text{ jonerna gäller:} \quad \Sigma_{\text{NO}_3} = 2 \cdot X \cdot 0.111 \cdot \text{m}^{-1} = 0.222 \cdot X \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{För } ^{233}\text{U} \text{ gäller:} \quad \Sigma_{\text{Uran}} = (28 + 298) \cdot 10^{-28} \cdot 1000 \cdot N_A \cdot X \cdot \text{m}^{-1} = 19.6322 \cdot X \cdot \text{m}^{-1}$$

Följaktligen får vi följande samband för f:

$$f = \frac{\Sigma_{\text{Uran}}}{\Sigma_{\text{Uran}} + \Sigma_{\text{D}_2\text{O}} + \Sigma_{\text{NO}_3}} \quad \text{Sätt in värdena enligt ovan så erhålles:}$$

$$f = \frac{19.6322 \cdot X \cdot \text{m}^{-1}}{19.6322 \cdot X \cdot \text{m}^{-1} + 0.0080 \cdot \text{m}^{-1} + 0.222 \cdot X \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{(1 + B2 \cdot L_{m2} + B2 \cdot \tau)}{(\eta + B2 \cdot L_{m2})} = 0.99299$$

$$\frac{19.6322 \cdot X \cdot \text{m}^{-1}}{19.6322 \cdot X \cdot \text{m}^{-1} + 0.0080 \cdot \text{m}^{-1} + 0.222 \cdot X \cdot \text{m}^{-1}} = \frac{(1 + B2 \cdot L_{m2} + B2 \cdot \tau)}{(\eta + B2 \cdot L_{m2})}$$

Ur detta samband kan vi lösa ut X:

$$X := -1 \cdot \frac{(-40 - 40 \cdot B2 \cdot L_{m2} - 40 \cdot B2 \cdot \tau)}{(98161 \cdot \eta - 1110 \cdot B2 \cdot L_{m2} - 99271 - 99271 \cdot B2 \cdot \tau)} \quad \text{eller efter insättning} \quad X = -0.096$$

Slutsatsen blir att denna reaktor aldrig blir kan bli kritisk för positiva värden på X, i varje fall utan externa reflektorer. Tanken är för liten.

(Detta resultat beror på ett skrivfel i uppgiftens text som inte upptäcktes i tid före tentan. Tanken skulle egentligen haft en diameter på 2 m i stället för 1 meter.)