

Lösningar till tentamen i Tillämpad Kärnkemi den 12 maj 1999

1. En liten homogen termisk reaktor för en rymdfarkost skall konstrueras som består av rent $^{233}\text{UO}_2$ -pulver (täthet 10.4 g/cm^3) jämnt fördelat i en matris av beryllium. Reaktorn skall vara cylindrisk med höjd = diameter = 1 m. Försumma absorptionstvårsnittet för syreatomerna i urandioxiden, inverkan av tankväggens material, samt använd kärndata för PWR. Produkten $p^* \epsilon$ kan anses vara 0.95. Vilken halt (volym%) av urandioxid behövs för att uppnå kriticitet i reaktorn? (10p).

Lösning:

Vi börjar med ekvationen för buktighet hos cylindrisk geometri (19.21c)

$$b := 1 \cdot \text{m} \quad B^2 := 33 \cdot b^{-2} \quad B^2 = 33 \cdot \text{m}^{-2}$$

Data för beryllium som moderator (tabell 19.3):

$$N_{\text{OBe}} := 0.123 \cdot 10^{30} \cdot \text{m}^{-3} \quad \rho_{\text{Be}} := 1840 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \Sigma_{\text{aBe}} := 0.13 \cdot \text{m}^{-1}$$

$$L_{2\text{m}} := 4.8 \cdot 10^{-2} \cdot \text{m}^2 \quad \tau_{\text{Be}} := 0.0100 \cdot \text{m}^2$$

För en kritisk reaktor gäller vidare:

$$k_{\text{eff}} := 1 \quad k_{\text{eff}} = \frac{k_{\text{inf}}}{1 + B^2 \cdot M^2}$$

Vilket kan omformas till:

$$k_{\text{inf}} = (1 + B^2 \cdot M^2)$$

För in b i stället för B^2 :

$$k_{\text{inf}} = 1 + 33 \cdot b^{-2} \cdot M^2$$

Beräkna M^2 och sätt in i ekvationen ovan:

$$L^2 = L_{2\text{m}} \cdot (1 - f) \quad M^2 = L^2 + \tau_{\text{Be}}$$

$$M^2 = L_{2\text{m}} \cdot (1 - f) + \tau_{\text{Be}}$$

$$k_{\text{inf}} = 1 + 33 \cdot b^{-2} \cdot [L_{2\text{m}} \cdot (1 - f) + \tau_{\text{Be}}]$$

Enligt ekv. 19.13 ges f av uttrycket:

$$f = \frac{\Sigma_{\text{afuel}}}{\Sigma_{\text{afuel}} + \Sigma_{\text{amod}} + \Sigma_{\text{aother}}}$$

I vårt fall är $\Sigma_{\text{aother}} = 0$, varför:

$$f = \frac{\Sigma_{\text{afuel}}}{\Sigma_{\text{afuel}} + \Sigma_{\text{amod}}}$$

För bränslet gäller enligt tabell 19.2:

$$\sigma_{n\gamma} := 28 \cdot 10^{-28} \cdot \text{m}^2 \quad \sigma_f := 298 \cdot 10^{-28} \cdot \text{m}^2$$

$$\sigma_{\text{afuel}} := \sigma_{n\gamma} + \sigma_f \quad \sigma_{\text{afuel}} = 3.26 \cdot 10^{-26} \cdot \text{m}^2$$

$$N_{\text{A}} := 6.0221367 \cdot \frac{10^{23}}{\text{mole}}$$

$$\rho_{\text{UO}_2} := 10.4 \cdot \text{gm} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$M_{\text{wUO}_2} := (233 + 2 \cdot 16) \cdot \text{gm} \cdot \text{mole}^{-1}$$

$$N_{\text{Ofuel}} := \frac{\rho_{\text{UO}_2}}{M_{\text{wUO}_2}} \cdot N_{\text{A}}$$

$$N_{\text{Ofuel}} = 2.363 \cdot 10^{28} \cdot \text{m}^{-3}$$

Antag att härden innehåller volymsbråket x av bränsle och $(1-x)$ av moderator. Vi kan då beräkna makroskopiska absorptionstvårsnitten på följande sätt:

$$\Sigma_{\text{amod}} = \sigma_{\text{aBe}} \cdot N_{\text{OBe}} \cdot (1 - x) \quad \Sigma_{\text{afuel}} = \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{\text{Ofuel}} \cdot x$$

Insättning i ekvationen för f ger då:

$$f = \frac{x \cdot \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}}}{\sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}} \cdot x + \Sigma_{\text{aBe}} \cdot (1 - x)}$$

Nu kan vi beräkna värdet på k_{inf} för vår reaktor ur ekv 19.12:

$$k_{\text{inf}} = \eta \cdot \epsilon \cdot p \cdot f$$

Men vi vet att produkten $\epsilon \cdot p = 0.95$ och $\eta = 2.27$ enligt tabell 19.2, varför: $k_{\text{inf}} = 2.27 \cdot 0.95 \cdot f$

$$k_{\text{inf}} = \frac{x \cdot 2.1565 \cdot \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}}}{\left[\sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}} \cdot x + \Sigma_{\text{aBe}} \cdot (1 - x) \right]}$$

Kombinerar vi detta med det tidigare uttrycket för k_{inf} och inför sambandet för f så erhålles ekvationen:

$$1 + \frac{33}{b^2} \cdot \left[L2_m \cdot (1 - f) + \tau_{\text{Be}} \right] = \frac{x \cdot 2.1565 \cdot \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}}}{\left[\sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}} \cdot x + \Sigma_{\text{aBe}} \cdot (1 - x) \right]}$$

$$1 + \frac{33}{b^2} \cdot \left[\left[L2_m - \frac{L2_m \cdot N_{0\text{fuel}} \cdot (x \cdot \sigma_{\text{afuel}})}{x \cdot \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}} + \Sigma_{\text{aBe}} \cdot (1 - x)} \right] + \tau_{\text{Be}} \right] = \frac{2.1565 \cdot x \cdot \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}}}{\left[x \cdot \sigma_{\text{afuel}} \cdot N_{0\text{fuel}} + \Sigma_{\text{aBe}} \cdot (1 - x) \right]}$$

Sätt in siffrvärdena och förenkla:

$$1 + \frac{33}{b^2} \cdot \left[5.8 \cdot 10^{-2} \cdot m^2 - \frac{x \cdot 36.976 \cdot m^2}{770.338 \cdot x + .13 \cdot (1 - x)} \right] = \frac{x \cdot 1.661 \cdot 10^3}{x \cdot 770.338 + .13 \cdot (1 - x)}$$

Nu har vi en ekvation med en obekant, x. Lös ut x ur denna:

$$x := 4.0625 \cdot \frac{(500 \cdot b^2 + 957 \cdot m^2)}{(13918625 \cdot b^2 - 3968283 \cdot m^2)} \quad x = 5.949 \cdot 10^{-4}$$

$$x = 0.059 \cdot \%$$

Härden bör således innehålla 0.059 volyms% av $^{233}\text{UO}_2$

OBS: Om man i stället beräknar Σ_{aBe} som produkten $\sigma_{\text{a}}(\text{th}) \cdot N_0$ blir värdet på Σ_{aBe} ca 0.113 m^{-1} , vilket medför ett svar på ca 0.051 %. Orsaken är att tvärsnittet bara ges med 1 siffras noggrannhet i tabellen.

2. Ett kraftföretag betalar 350 kr/kg uran för ett parti UF₆ tillverkad från natururan. Uranhexafluoriden anrikas sedan till en ²³⁵U-halt på 3.8%. För anrikningsarbetet betalar man 700 kr/kgSWU vid en ²³⁵U-halt i avriktat uran på 0.2%. Av det anrikade uranet gör man färdigt kärnbränsle och betalar 800 kr/kgU för tillverkningen. Som alternativ kan man köpa UF₆ från återvunnet uran med 0.6% ²³⁵U. Det återvunna uranet kostar bara 75 kr/kg UF₆, men anrikningen måste höjas till 3.9% för att kompensera för den negativa inverkan av ²³⁶U. Samtidigt stiger kostnaden för tillverkningen med 10% på grund av ökade strålskyddsbehov. Hur många kronor per kg U som färdigt bränsle skiljer mellan de båda alternativen? (10p).

Lösning:

kr := 1

$$\begin{aligned} \text{pris}_{\text{natUF6}} &:= 350 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} & x_{\text{natfuel}} &:= 3.8\% & \text{pris}_{\text{swu}} &:= 700 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} & x_{\text{w}} &:= 0.2\% \\ \text{pris}_{\text{nattillv}} &:= 800 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} & x_{\text{recu}} &:= 0.6\% & \text{pris}_{\text{recUF6}} &:= 75 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \left(\frac{238 + 6 \cdot 19}{328} \right) & & \text{per kg U} \\ \text{pris}_{\text{recutillv}} &:= \text{pris}_{\text{nattillv}} \cdot (1 + 10\%) & & & \text{pris}_{\text{recutillv}} &:= 880 \cdot \text{kr} \cdot \text{kg}^{-1} & x_{\text{recfuel}} &:= 3.9\% \end{aligned}$$

Tabell 2.1 ger: $x_{\text{natu}} := 0.724\%$

Först beräknar vi de ingående uranmängderna till isotopseparationen med hjälp av ekv (2.49) och sedan anrikningsarbetet med hjälp av ekv (2.57) och (2.56). Räkna på 1 kg färdigt bränsle.

Börja med natururanbaserat bränsle:

$$\begin{aligned} P &:= 1 \cdot \text{kg} & F_{\text{natu}} &:= P \cdot \frac{x_{\text{natfuel}} - x_{\text{w}}}{x_{\text{natu}} - x_{\text{w}}} & F_{\text{natu}} &= 6.87 \cdot \text{kg} & W &:= F_{\text{natu}} - P \\ V(x) &:= (2 \cdot x - 1) \cdot \ln \left(\frac{x}{1 - x} \right) & \text{SWU} &:= W \cdot V(x_{\text{w}}) + P \cdot V(x_{\text{natfuel}}) - F_{\text{natu}} \cdot V(x_{\text{natu}}) \\ & & \text{SWU} &= 5.991 \cdot \text{kg} \end{aligned}$$

$$\text{Pris}_{\text{natfuel}} := F_{\text{natu}} \cdot \text{pris}_{\text{natUF6}} + \text{SWU} \cdot \text{pris}_{\text{swu}} + P \cdot \text{pris}_{\text{nattillv}} \quad \text{Pris}_{\text{natfuel}} = 7.399 \cdot 10^3 \cdot \text{kr}$$

Gör sedan samma sak med bränsle baserat på återcyklat uran:

$$\begin{aligned} F_{\text{recu}} &:= P \cdot \frac{x_{\text{recfuel}} - x_{\text{w}}}{x_{\text{recu}} - x_{\text{w}}} & F_{\text{recu}} &= 9.25 \cdot \text{kg} & W &:= F_{\text{recu}} - P \\ V(x) &:= (2 \cdot x - 1) \cdot \ln \left(\frac{x}{1 - x} \right) & \text{SWU} &:= W \cdot V(x_{\text{w}}) + P \cdot V(x_{\text{recfuel}}) - F_{\text{recu}} \cdot V(x_{\text{recu}}) \\ & & \text{SWU} &= 7.303 \cdot \text{kg} \end{aligned}$$

$$\text{Pris}_{\text{recfuel}} := F_{\text{recu}} \cdot \text{pris}_{\text{recUF6}} + \text{SWU} \cdot \text{pris}_{\text{swu}} + P \cdot \text{pris}_{\text{recutillv}} \quad \text{Pris}_{\text{recfuel}} = 6.737 \cdot 10^3 \cdot \text{kr}$$

$$\text{Skillnad} := \text{Pris}_{\text{natfuel}} - \text{Pris}_{\text{recfuel}} \quad \text{Skillnad} = 661.71 \cdot \text{kr}$$

Svar: Bränsle baserat på återvunnet uran blir 662 kr/kg U billigare än bränsle baserat på natururan.

Om man använder värdet 0.72% på halten ²³⁵U i natururan erhålles ca 420 kr/kg U i stället.

3. Sveriges första reaktor (R1, belägen i berget nära Stockholms centrum) var en termisk reaktor med ett bränsle av metalliskt naturligt uran kapslat i aluminium. Reaktorn lades ned i början på 1960-talet. Som moderator användes grafit, vilket gav ett väl termaliserat n-flöde. Moderatortemperaturen vid drift uppskattas till 150 C. Bränslestavarna hade en diameter på 1 tum med en kapslingstjocklek på 2 mm. Försumma spalten mellan bränsle och kapsling och stavarnas ändstycken. Hur mycket ^{99}Tc (gram) bör idag finnas per kg av gammalt utbränt bränsle om detta har en medelutbränningsgrad på 4000 MWd/kg U? Använd nuklidkartans isobarutbyten vid termisk fission. De isolerade utbytena för masstal 99 kan antagas vara följande bråkdelar av totala isobarutbytet: Z=37 0.0009, Z=38 0.0615, Z=39 0.2551, Z=40 0.5866, Z=41 0.0885, Z=42 0.0071, Z=43 0.0000. Försumma n, γ processer under reaktordriften. (10p).

Lösning:

$$\text{MeV} := 1.60217733 \cdot 10^{-13} \cdot \text{joule} \quad \text{MWd} := 10^6 \cdot \text{watt} \cdot \text{day} \quad q_{\text{fiss}} := 200 \cdot \text{MeV}$$

$$Q := 4000 \cdot \text{MWd} \cdot \text{kg}^{-1} \quad Q = 3.456 \cdot 10^{14} \cdot \frac{\text{joule}}{\text{kg}}$$

$$n_{\text{fiss}} := \frac{Q}{q_{\text{fiss}}} \quad n_{\text{fiss}} = 1.079 \cdot 10^{25} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$x_{\text{A99}} := 6.074\%$$

^{99}Tc har Z = 43. Som framgår av givna isolerade utbyten leder fission bara till bildning av kortlivade föregångare till ^{99}Tc . Vi kan därför anse att hela isobarkedjans utbyte når den mycket långlivade ^{99}Tc too 100%, samt försumma ^{99}Tc :s sönderfall under och efter reaktordriften.

$$n_{\text{Tc}} := x_{\text{A99}} \cdot n_{\text{fiss}} \quad n_{\text{Tc}} = 6.551 \cdot 10^{23} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$M_{\text{wTc}} := 99 \cdot \text{gm} \cdot \text{mole}^{-1} \quad N_{\text{A}} = 6.022 \cdot 10^{23} \cdot \text{mole}^{-1}$$

$$m_{\text{Tc}} := \frac{n_{\text{Tc}}}{N_{\text{A}}} \cdot M_{\text{wTc}} \quad m_{\text{Tc}} = 0.108 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \quad \text{Men detta gäller per kg uran i bränslet, varför vi måste korrigera för kapslingens vikt.}$$

$$\rho_{\text{U}} := 18.95 \cdot \text{gm} \cdot \text{cm}^{-3} \quad \text{Ur tabell i nuklidkartans omslagshäfte.}$$

$$\rho_{\text{Al}} := 2.6989 \cdot \text{gm} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$d_{\text{ytter}} := 1 \cdot \text{in} \quad r_{\text{ytter}} := \frac{d_{\text{ytter}}}{2} \quad r_{\text{ytter}} = 1.27 \cdot \text{cm}$$

$$r_{\text{inner}} := r_{\text{ytter}} - 2 \cdot \text{mm} \quad r_{\text{inner}} = 1.07 \cdot \text{cm}$$

På en stavlängd av 1 m har vi då följande massor av uran och aluminium: $l := 1 \cdot \text{m}$

$$m_{\text{Al}} := \pi \cdot (r_{\text{ytter}}^2 - r_{\text{inner}}^2) \cdot l \cdot \rho_{\text{Al}} \quad m_{\text{U}} := \pi \cdot r_{\text{inner}}^2 \cdot l \cdot \rho_{\text{U}} \quad m_{\text{tot}} := m_{\text{Al}} + m_{\text{U}}$$

$$\text{Halt}_{\text{Tc}} := \frac{m_{\text{Tc}} \cdot m_{\text{U}}}{m_{\text{tot}}} \quad \text{Halt}_{\text{Tc}} = 101.769 \cdot \frac{\text{gm}}{\text{kg}}$$

4. För att bestämma utbränningen av ett bränsleelement kapades en pinne och ett fragment av en urankuts togs ut. Fragmentet löstes i 6 M salpetersyra. 0.1 ml av denna lösning späddes till 100 ml med destillerat vatten (lösning A). 0.5 ml av lösning A fick passera en liten kolonn med mordenit. Därvid sorberades cesium selektivt. Kolonnen tvättades med 0.1 M salpetersyra, torkades och mättes sedan med en HPGe detektor. Därvid fann man att kolonnen innehöll 1800 Bq ^{134}Cs och 2500 Bq ^{137}Cs . Mätningen utfördes 1 år efter det att reaktorn stannats. Vid analys av lösning A fann man att denna innehöll 2 $\mu\text{g/l}$ uran. Beräkna bränslepinnens utbränning i MWd/kg U om fissionsutbyten för ^{235}U kan användas och reaktorn gått 3 år med konstant effekt. (10p)

Lösning:

$$\lambda_{137} := \frac{\ln(2)}{30.0 \cdot \text{yr}} \quad \lambda_{137} = 7.322 \cdot 10^{-10} \cdot \text{sec}^{-1} \quad y_{137} := 6.183\% \quad \text{Bq} := \text{sec}^{-1}$$

$$t_{\text{irr}} := 3 \cdot \text{yr} \quad t_{\text{cool}} := 1 \cdot \text{yr} \quad E_{\text{fiss}} := 200 \cdot \text{MeV}$$

$$A_{137} = R_{\text{fiss}} \cdot y_{137} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{irr}})\right) \cdot \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{cool}}) \quad \text{OBS: } ^{134}\text{Cs} \text{ är INTE en FP}$$

$$R_{\text{fiss}} = \phi \cdot \sigma_f \cdot N_{235\text{U}} \quad \text{Utbr} = \frac{R_{\text{fiss}} \cdot E_{\text{fiss}} \cdot t_{\text{irr}}}{m_{\text{uran}}} \quad R_{\text{fiss}} = \frac{\text{Utbr} \cdot m_{\text{uran}}}{E_{\text{fiss}} \cdot t_{\text{irr}}}$$

$$R_{\text{fiss}} = \frac{A_{137}}{y_{137} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{irr}})\right) \cdot \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{cool}})}$$

$$\frac{\text{Utbr} \cdot m_{\text{uran}}}{E_{\text{fiss}} \cdot t_{\text{irr}}} = \frac{A_{137}}{y_{137} \cdot \left(1 - \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{irr}})\right) \cdot \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{cool}})}$$

$$m_{\text{uran}} := 2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\text{gm}}{\text{liter}} \cdot 0.5 \cdot \text{mL} \quad m_{\text{uran}} = 1 \cdot 10^{-12} \cdot \text{kg} \quad A_{137} := 2500 \cdot \text{Bq}$$

$$\text{Utbr} := \frac{A_{137}}{\left[y_{137} \cdot \left(\left(1 - \exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{irr}}) \right) \cdot \left(\exp(-\lambda_{137} \cdot t_{\text{cool}}) \cdot m_{\text{uran}} \right) \right) \right]} \cdot E_{\text{fiss}} \cdot t_{\text{irr}}$$

$$\text{Utbr} = 21694.87 \cdot \frac{\text{MWd}}{\text{kg}} \quad \text{Svar: } 21700 \text{ MWd/kg U (anmärkningsvärt högt)}$$

5. Sveriges el-förbrukning uppgår nu till 142 TWh/år. Av detta kommer i medeltal 50% från kärnkraft. Man beräknar att CLAB omkring år 2010 kommer att innehålla använt kärnbränsle som motsvarar 6500 ton uran, räknat som ursprunglig uranvikt innan användningen. Medelutbränningen uppskattas till 50 MWd/kg och plutoniumhalten är 0.71 vikts% av initial uranvikt. Halten av övriga aktinider försummas. Antag att detta bränsle i framtiden upparbetas och återvunnet uran och plutonium används i reaktorer av LMFBR typ med en termisk verkningsgrad på 41%. Antag vidare att 65% av allt återvunnet U och Pu kan konverteras och klyvas i denna reaktortyp samt att fissionsenergin är 200 MeV för alla aktinider. Hur många år skulle man då kunna fortsätta att producera halva Sveriges nuvarande el-förbrukning från innehållet i CLAB om vi bygger ett lämpligt antal LMFBR-reaktorer efter år 2010? (10p)

Lösning:

$$TWh := 10^{12} \cdot \text{watt} \cdot \text{hr} \quad Q := 50 \cdot \text{MWd} \cdot \text{kg}^{-1} \quad C_{Pu} := 0.71\% \quad m_{0U} := 6500 \cdot 10^3 \cdot \text{kg}$$

$$m_{Pu} := C_{Pu} \cdot m_{0U} \quad m_{Pu} = 4.615 \cdot 10^4 \cdot \text{kg} \quad N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \quad E_{fiss} := 200 \cdot \text{MeV}$$

$$M_{wU} := 238.03 \cdot \text{gm} \cdot \text{mole}^{-1} \quad \text{Data ur appendix I i läroboken. Vi försummar effekten av anrikning på molvikten eftersom anrikningen inte är given i uppgiften.}$$

$$m_{fissU} := \frac{Q}{E_{fiss}} \cdot \frac{M_{wU}}{N_A} \quad m_{fissU} = 0.053 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{kg}} \quad m_{Ukvar} := m_{0U} \cdot (1 - 0.053)$$

$$m_{Ukvar} = 6.156 \cdot 10^6 \cdot \text{kg}$$

Beräkna nu hur mycket energi som kan utvinnas ur lagrade uran och plutonium mängder:

$$n_{Ukvar} := \frac{m_{Ukvar}}{M_{wU}} \cdot N_A \quad n_{Pukvar} := \frac{m_{Pu}}{239 \cdot \text{gm} \cdot \text{mole}^{-1}} \cdot N_A \quad \text{Approximera molvikten för Pu.}$$

Av dessa antal atomer kan vi konvertera och klyva 65%, varför möjlig termisk energimängd blir:

$$Q_{th} := (n_{Ukvar} + n_{Pukvar}) \cdot 65\% \cdot E_{fiss} \quad Q_{th} = 9.077 \cdot 10^4 \cdot \text{TWh}$$

Som el-energi vid 41% verkningsgrad blir detta:

$$\eta := 41\% \quad Q_{el} := Q_{th} \cdot \eta \quad Q_{el} = 3.722 \cdot 10^4 \cdot \text{TWh}$$

Årlig produktion skall vara 50% av 142 TWh el:

$$Q_{\text{årlig}} := 142 \cdot \text{TWh} \cdot 50\%$$

$$Tiden_{\text{år}} := \frac{Q_{el}}{Q_{\text{årlig}}} \quad Tiden_{\text{år}} = 524.192$$

Svar: CLAB kan ge angiven el-mängd under 524 år